NONLINEAR EQUATIONS OF LONG WAVES IN A PROBLEM OF THERMOCAPILLARY CONVECTION IN A TWO-LAYER FLUID.

L.G. Badratinova

The paper deals with consideration of a long-wave approximation for the problem of thermocapillary convection in two-layer fluid confined between parallel solid plates, with a constant temperature difference sustained between the plates. The problem for description of convection is reduced to a system of two quasilinear equations to determine the interface level and the pressure of one medium. In the derived long-wave approximation, the bifurcation problem is studied for equilibrium states.

Сибирское отделение АН СССР · Институт гидродинамики
ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ
выпуск 69, 1985 г.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Л. Г. Бадратинова

В данной работе дается вывод нелинейных уравнений длинноволнового термокапиллярного движения в системе из двух слоев жидкостей, заключенных между твердыми стенками с заданным перепадом температур. В рамках длинноволнового приближения рассматривается задача о ветвлении состояния равновесия системы под действием термокапиллярных сил. В общем случае задача о ветвлении сложна, так как наличие неизвестной границы раздела затрудняет её сведение к "хорошему" операторному виду. Для задачи о термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое жидкости преодолеть трудности, связанные с необходимостью поиска области течения, удалось в работе [1], в которой на основе комплексного представления решений осуществлено сведение задачи к задаче для аналитических функций и доказано существование нетривиальных решений при определенных значениях бифуркационного параметра - числа Марангони. Изучаемое ниже длинноволновое приближение оправдано тем, что при любом малом волновом числе ω существует порог устойчивости по параметру Марангони линеаризованной задачи о термокапиллярной конвекции в двухслойной жидкости [2]. В длинноволновом приближении свободная граница фактически "исчезает", и задача сводится к операторному уравнению, к которому применяется известная теорема Красносельского о ветвлении решений нелинейных уравнений [3].

I. Исходные уравнения. Пусть две несмешивающиеся вязкие несжимаемые жидкости заключены между твердыми стенками $z = l_1$, $z = -l_2$ $(l_1, l_2 > 0)$. Температуры T_{01} на стенке $z = l_1$ и T_{02} на стенке $z = -l_2$ – заданные постоянные. Условимся снабжать индексом "I" (соответственно, "2") все параметры, характеризующие верхнюю (соответственно, нижнюю) жидкость и будем считать постоянными следующие параметры $(j = 1, 2)$: ρ_j (плотности сред), μ_j (коэффициенты динамической вязкости), χ_j и $\varkappa_j$ (коэффициенты температуропроводности и теплопроводности), g (ускорение силы тяжести). Предположим, что граница раздела жидкостей однозначно проектируется на плоскость $z = \text{const}$, не пересекает твердых стенок и определяется уравнением $z = f(x, y, t)$, где f – периодическая функция пространственных координат. Уравнения движения и переноса тепла имеют вид [4]

$$f(x, y, t) < z < l_1$$

$$\rho_1 \vec{v}_{1t} + \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 = - \nabla p_1 + \mu_1 \Delta \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{g} , \quad (1.1)$$

$$\vec{v}_1 = (u_1, v_1, w_1), \quad \vec{g} = (0, 0, -g) ,$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 , \quad T_{1t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla T_1 = \chi_1 \Delta T_1$$

$$-l_2 < z < f(x, y, t)$$

$$\rho_2 \vec{v}_{2t} + \rho_2 (\vec{v}_2 \cdot \nabla) \vec{v}_2 = - \nabla p_2 + \mu_2 \Delta \vec{v}_2 + \rho_2 \vec{g} , \quad (1.2)$$

$$\vec{v}_2 = (u_2, v_2, w_2) ,$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_2 = 0 , \quad T_{2t} + \vec{v}_2 \cdot \nabla T_2 = \chi_2 \Delta T_2$$

На твердых стенках задаются температуры и выполняются условия прилипания

$$z=l_1 \quad T_1 = T_{10}, \quad \vec{v}_1 = 0; \quad z = -l_2 \quad T_2 = T_{20}, \quad \vec{v}_2 = 0, \qquad (1.3)$$

а на границе раздела – условия непротекания, непрерывности касательной составляющей скорости, температуры, сохранения потоков энергии и импульса [5]

$$z = f(x, y, t)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial t} \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2},$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{\tau}_x = \vec{v}_2 \cdot \vec{\tau}_x, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{\tau}_y = \vec{v}_2 \cdot \vec{\tau}_y, \qquad (1.4)$$

$$T_1 = T_2, \quad \varkappa_1 \nabla T_1 \cdot \vec{n} = \varkappa_2 \nabla T_2 \cdot \vec{n},$$

$$(p_2 - p_1)\vec{n} = 2(\mu_1 S_1 - \mu_2 S_2)\vec{n} = -2\sigma H\vec{n} - \nabla_\Gamma \sigma .$$

При $t = 0$ задаются поля скоростей $\vec{v}_j^{\,0}(\vec{x})$, температур $T_j^0(\vec{x})$, форма границы раздела $f^0(x, y)$. В уравнениях (I.4) $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к границе раздела, направленный в среду с индексом "I", $\vec{\tau}_x$ и $\vec{\tau}_y$ – направленные вдоль осей x и y орты касательных векторов к поверхности $z = f(x, y, t)$, S_1 и S_2 – тензоры скоростей деформаций для сред "I" и "2"; H – средняя кривизна границы раздела, ∇_Γ – поверхностный градиент на этой границе. Ниже считается, что коэффициент поверхностного натяжения σ является линейной функцией температуры T : $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_{10})$, где $\sigma_T > 0$ – постоянная, $\sigma_0 = \sigma(T_{10})$. В линейном приближении исследование устойчивости тривиального решения

$$\vec{v}_{01} = \vec{v}_{02} = 0, \quad p_{01} = p_{02} = \text{const}, \quad T_{02} = -Az + T_0,$$
$$T_{01} = -\varkappa_*^{-1} Az + T_0, \quad A = \text{const}, \quad \varkappa_* = \varkappa_1/\varkappa_2 \qquad (1.5)$$

задачи (I.I) – (I.4) относительно возмущений, пропорциональных $\exp[\lambda t + i(\omega_x x + \omega_y y)]$ проводилось в работе [2]. Полученное в [2] условие для нахождения критического параметра Ma – числа Марангони в случае конечных толщин l_1, l_2 представимо в следующем виде:

$$F(Ma, We, W, l_*, \varkappa_*, \mu_*, \chi_*, \omega) = 0 \qquad (1.6)$$

(Решение (I.5) устойчиво, если $F < 0$) В формуле (I.6) $Ma = \sigma_T A l_2^2 / \mu_2 \chi_2$, $\omega = l_2\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ – безразмерное волновое число, $We = \sigma_0 l_2 / \mu_2 \chi_2$ – модифицированное число Вебера, $W = (\rho_2 - \rho_1) g l_2^2 / \sigma_0$ – аналог числа Вебера, $l_* = l_1/l_2$, $\mu_* = \mu_1/\mu_2$, $\chi_* = \chi_1/\chi_2$, функция F определнется формулой

$$F = 8\omega^2[\varkappa_* \operatorname{cth}(\omega l_*) + \operatorname{cth}\omega]\, F_1(\omega, l_*, \mu_*) -$$

$$- Ma\,\{F_2(\omega, l_*, \chi_*) + 8\omega^5 We^{-1} W^{-1}[\operatorname{cth}(\omega l_*) + \qquad (1.7)$$

$$+ \operatorname{cth}\omega](1 + \omega^2 W^{-1}) F_3(\omega, l_*, \mu_*)\},$$

где

$$F_1 = (\operatorname{cth}\omega - \frac{\omega}{\operatorname{sh}^2\omega})[1 - \frac{\omega^2 l_*^2}{\operatorname{sh}^2(\omega l_*)}] + \mu_*(1 - \frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2\omega}) \times$$

$$\times[\operatorname{cth}(\omega l_*) - \frac{\omega l_*}{\operatorname{sh}^2(\omega l_*)}], \qquad F_2 = (1 - \frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2\omega}) \times$$

$$\times[1 - \frac{\omega^3 l_*^3 \operatorname{ch}(\omega l_*)}{\operatorname{sh}^3(\omega l_*)}] - \chi_*^{-1}(1 - \frac{\omega^3 \operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}^3\omega})[1 - \frac{\omega^2 l_*^2}{\operatorname{sh}^2(\omega l_*)}], \qquad (1.8)$$

$$F_3 = (1 - \frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2\omega})/\operatorname{sh}^2\omega - \mu_* l_*[1 - \frac{\omega^2 l_*^2}{\operatorname{sh}^2(\omega l_*)}]/\operatorname{sh}^2(\omega l_*).$$

В заключение этого пункта приведем асимптотику равенства (I.6) при $\omega \to 0$. Эта асимптотика получается с помощью (I.7), (I.8) и имеет вид

$$Ma = \frac{2\,We\,\omega^2(1 + W\omega^{-2})(1 + \mu_* l_*^{-1})(1 + \varkappa_* l_*^{-1})}{3(1 - \mu_* l_*^{-2})(1 + l_*^{-1})}. \qquad (1.9)$$

2. Вывод уравнений длинноволнового термокапиллярного движения. Пусть l – наименьший из периодов функции $f^0(x, y)$, $U = \chi_2 / l_2$, а $\varepsilon = (l_1 + l_2)/l << 1$. Введем безразмерные переменные

$$x' = x/l, \quad y' = y/l, \quad z' = (z + l_2)/(l_1 + l_2), \quad t' = Ut/l$$

и искомые функции

$$u_j' = u_j/U, \; v_j' = v_j/U, \; w_j' = w_j/U\varepsilon, \quad h = (f + l_2)/(l_1 + l_2),$$

$$\theta_j = (T_j - T_{10})/(T_{20} - T_{10}), \quad p_j' = p_j(l_1 + l_2)^2/\mu_2 Ul .$$

Преобразуя уравнения (I.I), (I.2) к безразмерным переменным, получим (опуская штрихи)

$$h(x, y, t) < z < 1$$

$$\mu_* u_{1zz} - p_{1x} = \varepsilon^2 \rho_* \, Pr_2^{-1}(u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y} + w_1 u_{1z}) - \varepsilon^2 \mu_* (u_{1xx} + u_{1yy}),$$

$$\mu_* v_{1zz} - p_{1y} = \varepsilon^2 \rho_* Pr_2^{-1}(v_{1t} + u_1 v_{1x} + v_1 v_{1y} + w_1 v_{1z}) - \varepsilon^2 \mu_* (v_{1xx} + v_{1yy}),$$

$$p_{1z} + \rho_* \gamma = -\varepsilon^4 \rho_* \, Pr_2^{-1}(w_{1t} + u_1 w_{1x} + v_1 w_{1y} + w_1 w_{1z}) + \varepsilon^2 \mu_* w_{1zz} + \varepsilon^4 \mu_* (w_{1xx} + w_{1yy}),$$

$$u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} = 0$$

$$\theta_{1zz} = \varepsilon^2 \chi_*^{-1}(\theta_{1t} + u_1 \theta_{1x} + v_1 \theta_{1y} + w_1 \theta_{1z}) - \varepsilon^2(\theta_{1xx} + \theta_{1yy}),$$

$$0 < z < h(x, y, t)$$

$$u_{2zz} - p_{2x} = \varepsilon^2 Pr_2^{-1}(u_{2t} + u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y} + w_2 u_{2z}) -$$

$$- \varepsilon^2 (u_{2xx} + u_{2yy}) ,$$

$$v_{2zz} - p_{2y} = \varepsilon^2 Pr_2^{-1}(v_{2t} + u_2 v_{2x} + v_2 v_{2y} + w_2 v_{2z}) -$$

$$- \varepsilon^2 (v_{2xx} + v_{2yy})$$

$$p_{2z} + \gamma = - \varepsilon^4 Pr_2^{-1}(w_{2t} + u_2 w_{2x} + v_2 w_{2y} + w_2 w_{2z}) +$$

$$+ \varepsilon^2 w_{2zz} + \varepsilon^4 (w_{2xx} + w_{2yy}) ,$$

$$u_{2x} + v_{2y} + w_{2z} = 0 ,$$

$$\theta_{2zz} = \varepsilon^2 (\theta_{2t} + u_2 \theta_{2x} + v_2 \theta_{2y} + w_2 \theta_{2z}) -$$

$$- \varepsilon^2 (\theta_{2xx} + \theta_{2yy}) .$$

Здесь $Pr_2 = \nu_2 / \chi_2$ – число Прандтля, $\gamma = We\, W \varepsilon (1 + 1_*)^2 / (1 - \rho_*)$. Предположим, что при $\varepsilon \to 0$ величины $\varepsilon^2 \rho_* Pr_2^{-1}$, $\varepsilon^2 Pr_2^{-1}$, $\varepsilon^2 \chi_*^{-1}$, $\varepsilon^2 \mu_*$ также стремятся к нулю. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в преобразованных уравнениях движения, получим

$$h(x, y, t) < z < 1 \quad \mu_* u_{1zz} - p_{1x} = 0 ,$$

$$\mu_* v_{1zz} - p_{1y} = 0 , \quad p_{1z} + \rho_* \gamma = 0 , \qquad (2.1)$$

$$u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} = 0 , \quad \theta_{1zz} = 0 ,$$

$$0 < z < h(x, y, t) \quad u_{2zz} - p_{2x} = 0 ,$$

$$v_{2zz} - p_{2y} = 0 , \quad p_{2z} + \gamma = 0 , \qquad (2.2)$$

$$u_{2x} + v_{2y} + w_{2z} = 0 , \quad \theta_{2zz} = 0 .$$

Совершая замену переменных в граничных условиях (I.3), (I.4) и переходя к пределу $\varepsilon = 0$, получим

$$z = 1 \qquad u_1 = v_1 = w_1 = 0 \;, \qquad \theta_1 = 0 \;, \tag{2.3}$$

$$z = 0 \qquad u_2 = v_2 = w_2 = 0 \;, \qquad \theta_2 = 1 \;, \tag{2.4}$$

$$z = h(x, y, t)$$

$$w_1 - h_x u_1 - h_y v_1 = w_2 - h_x u_2 - h_y v_2 = h_t \;, \tag{2.5}$$

$$- u_1 h_y + v_1 h_x = -u_2 h_y + v_2 h_x \;, \tag{2.6}$$

$$u_1 h_x + v_1 h_y = u_2 h_x + v_2 h_y \;, \tag{2.7}$$

$$\theta_1 = \theta_2 \; (= \theta) \;, \tag{2.8}$$

$$u_{2z} - \mu_* u_{1z} = - \eta \theta_x \;, \qquad v_{2z} - \mu_* v_{1z} = - \eta \theta_y \;, \tag{2.9}$$

$$p_1 - p_2 = \alpha \Delta h \;, \tag{2.10}$$

$$\varkappa_* \theta_{1z} - \theta_{2z} = 0 \tag{2.11}$$

Здесь $\alpha = \varepsilon^3 We$, $\eta = \varepsilon(1 + \varkappa_*^{-1} l_*) Ma$. В (2.I0) и ниже символы Δ, ∇, div обозначают двумерные дифференциальные операторы по переменным x, y.

Интегрируя уравнения (2.I), (2.2) и используя условия (2.3), (2.4), получим

$$p_1 = - \rho_* \gamma z + P_1(x, y), \qquad p_2 = - \gamma z + P_2(x, y) \;,$$

$$\mu_* \vec{u}_1 = \frac{\nabla P_1 (z - 1)^2}{2} + \vec{c}_1 (z - 1), \quad \theta_1 = \frac{1 - z}{1 - (1 - \varkappa_*)h} \;,$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\nabla P_2 z^2}{2} + \vec{c}_2 z \;, \quad \theta_2 = 1 - \frac{\varkappa_* z}{1 - (1 - \varkappa_*)h} \;, \tag{2.12}$$

$$\mu_* w_1 = -\frac{\Delta P_1 (z-1)^3}{6} - \operatorname{div}\vec{c}_1 \frac{(z-1)^2}{2},$$

$$w_2 = -\frac{\Delta P_2 z^3}{6} - \operatorname{div}\vec{c}_2 \frac{z^2}{2}.$$

Здесь $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, 0)$, $\vec{u}_2 = (u_2, v_2, 0)$, через $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ обозначены вектор-функции от переменных x, y. Из (2.5) – (2.7) следует $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, $w_1 = w_2$, т.е.

$$\frac{\nabla P_1 (h-1)^2}{2} + \vec{c}_1 (h-1) = \mu_* \cdot \frac{\nabla P_2 h^2}{2} + \mu_* \vec{c}_2 h, \qquad (2.13)$$

$$\frac{\Delta P_1 (h-1)^3}{6} + \operatorname{div}\vec{c}_1 \frac{(h-1)^2}{2} = \mu_* \frac{\Delta P_2 h^3}{6} + \mu_* \operatorname{div}\vec{c}_2 \frac{h^2}{2}. \qquad (2.14)$$

Далее, из условий (2.5), (2.9) с учетом (2.I2) находим

$$\mu_* h_t = -\operatorname{div}\left[\frac{\nabla P_1 (h-1)^3}{6} + \vec{c}_1 \frac{(h-1)^2}{2}\right], \qquad (2.15)$$

$$\nabla P_1 + \vec{c}_2 - \vec{c}_1 = -\eta \nabla \theta - \nabla P h. \qquad (2.16)$$

Здесь введено обозначение $P = P_2 - P_1$. В силу условия (2.I0) из первых двух уравнений (2.I2) следует зависимость

$$P = (1-\rho_*)\gamma h - \alpha \Delta h. \qquad (2.17)$$

Положим в формулах (2.I3), (2.I4) $P_2 = P + P_1$, из формул (2.I3), (2.I6) найдем выражения для $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и подставим их в (2.I4), (2.I5). В результате после небольших преобразований получим систему уравнений относительно функций h и P_1

$$\operatorname{div}\left\{(h-1)^2\left[4 - h + \frac{3(h-1)}{(\mu_*-1)h+1}\right]\nabla P_1\right\} =$$

$$= -12\mu_* h_t - 3\mu_* \operatorname{div}\left\{(h-1)^2 h \frac{2\eta\nabla\theta + h\nabla P}{(\mu_*-1)h+1}\right\},$$

$$\operatorname{div}\left\{\left[6h^2 - 9h + 4 - \frac{3(h-1)(2h-1)}{(\mu_* - 1)h + 1}\right]\nabla P_1\right\} =$$

$$= -12(\mu_* - 1)h_t - \operatorname{div}\left\{6(h-1)\left[h - 1 - \frac{2h-1}{(\mu_* - 1)h+1}\right]\eta\nabla\theta + \right.$$

$$\left. + h\left[4h^2 - 6h + 3 - \frac{3(2h-1)(h-1)}{(\mu_* - 1)h + 1}\right]\nabla P\right\}, \qquad (2.18)$$

в которой выражения для $\nabla\theta$, ∇P находятся с помощью (2.I2), (2.I7) и имеют вид

$$\nabla\theta = -\frac{\varkappa_*\nabla h}{[(1 - \varkappa_*)h - 1]^2}, \qquad \nabla P = (1 - \rho_*)\gamma\nabla h - \alpha\nabla\Delta h. \qquad (2.19)$$

Система (2.I8), (2.I9) является нестандартной. Она содержит производную по времени только от функции h и относительно этой функции существенно нелинейна. При любых значениях параметров μ_*, $\varkappa_*$, α, η и γ система (2.I8), (2.I9) имеет частное решение

$$h = h_0 = \text{const}, \qquad P_1 = P_{10} = \text{const}.$$

В нестационарном случае система (2.I8), (2.I9) изучаться не будет, всюду ниже будем считать, что $h_t = 0$ в уравнениях (2.I8).

3. Переход к операторному уравнению. В дальнейшем ищем решение h, P_1 системы (2.I8), (2.I9) в виде

$$h = h_0 + \mathcal{H}, \qquad P_1 = P_{10} + \psi,$$

где $h_0 = \text{const}$, $P_{10} = \text{const}$ – ее частное решение, а $\mathcal{H}$ и ψ – функции, периодические по направлениям x, y (с периодом n, m), причем

$$\int_0^n\int_0^m \mathcal{H}\,dxdy = 0, \qquad \int_0^n\int_0^m \psi\,dxdy = 0.$$

Введем пространства Гельдера $C^{k+\mu}(\bar{\Pi})$, $\vec{C}^{k+\mu}(\bar{\Pi})$, где $k \geq 0$ – целое число, $0 < \mu < 1$, а $\Pi = \{|x| \leq n, |y| \leq m\}$. Пространство $C^{k+\mu}(\bar{\Pi})$ есть пространство k раз непрерывно дифференцируемых периодических функций с конечной нормой

$$\|u\|_{k+\mu} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{r+s=i} \sup_{\xi \in \bar{\Pi}} |\partial_x^r \partial_y^s u(\xi)| +$$

$$+ \sup_{\xi,\eta \in \bar{\Pi}} \frac{\sum_{r+s=k} |\partial_x^r \partial_y^s u(\xi) - \partial_x^r \partial_y^s u(\eta)|}{|\xi - \eta|^{\mu}},$$

$\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$. Пространство $\vec{C}^{k+\mu}(\bar{\Pi})$ – это пространство, состоящее из вектор-функций $\vec{u} = (u, v)$ компоненты которых принадлежат $C^{k+\mu}(\bar{\Pi})$. Норма в $\vec{C}^{k+\mu}(\bar{\Pi})$ определяется формулой

$$\|\vec{u}\|_{k+\mu} = \|u\|_{k+\mu} + \|v\|_{k+\mu}.$$

Через $\overset{\circ}{C}{}^{k+\mu}(\bar{\Pi})$ и $\overset{\circ}{\vec{C}}{}^{k+\mu}(\bar{\Pi})$ обозначим подпространства функций из $C^{k+\mu}(\bar{\Pi})$ и $\vec{C}^{k+\mu}(\bar{\Pi})$, для которых среднее значение по прямоугольнику периодов равно нулю.

Пусть $\mathcal{H} \in \overset{\circ}{C}{}^{4+\mu}(\bar{\Pi})$, $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\mu}(\bar{\Pi})$. Если оператор Δ действует в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{k+\mu}(\bar{\Pi})$, $k \geq 2$, то он обратим. Поэтому всюду в (2.I8), (2.I9) можно считать

$$h = h_0 + Q(\varphi), \tag{3.1}$$

где $\varphi = \Delta h = \Delta \mathcal{H} \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\mu}(\bar{\Pi})$, $Q \in \overset{\circ}{C}{}^{4+\mu}(\bar{\Pi})$. Задача (2.I8) может быть записана в виде

$$L\vec{\varphi} = \lambda R\vec{\varphi} + N\vec{\varphi}, \tag{3.2}$$

где $\lambda = \eta$ – спектральный параметр, $\vec{\varphi} \in \overset{\circ}{\vec{C}}{}^{2+\mu}(\bar{\Pi})$ – вектор-функция с компонентами φ, ψ;

$$L = \begin{pmatrix} -b_1 \Delta + c_1 & a_1 \Delta \\ -b_2 \Delta + c_2 & a_2 \Delta \end{pmatrix} \in [\overset{\circ}{\vec{C}}{}^{2+\mu}(\Pi) \to \overset{\circ}{\vec{C}}{}^{\mu}(\Pi)] \tag{3.3}$$

операторы R и N ($R \in [\overset{\circ}{\vec{C}}{}^{2+\mu}(\bar{\Pi}) \to \overset{\circ}{\vec{C}}{}^{1+\mu}(\bar{\Pi})]$, $N \in [\overset{\circ}{\vec{C}}{}^{2+\mu}(\bar{\Pi}) \to \vec{C}^{\mu}(\bar{\Pi})]$) действуют на вектор-функцию $\vec{\varphi}$ по правилу

$$R\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} R_1(\varphi) \\ R_2(\varphi) \end{pmatrix}, \quad N\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} N_1(\varphi, \psi) \\ N_2(\varphi, \psi) \end{pmatrix},$$

где

$$R_i(\varphi) = D_i \varphi + \nabla D_i \cdot \nabla Q,$$

$$N_i(\varphi, \psi) = \nabla A_i \cdot \nabla \psi + \nabla B_i \cdot \nabla \varphi + \nabla C_i \cdot \nabla Q + \tag{3.4}$$

$$+ (A_i - a_i)\Delta\psi + (B_i - b_i)\Delta\varphi + (C_i - c_i)\varphi.$$

В формулах (3.3), (3.4)

$$A_1 = (h-1)^2\left[4 - h + \frac{3(h-1)}{(\mu_* - 1)h + 1}\right],$$

$$B_1 = -\frac{3\mu_* h\alpha}{(\mu_* - 1)h + 1}, \quad C_1 = \frac{3\mu_* h(1 - \rho_*)\gamma}{(\mu_* - 1)h + 1},$$

$$D_1 = \frac{6\mu_* \varkappa_* h(h-1)^2}{[(\mu_* - 1)h + 1][(1 - \varkappa_*)h - 1]^2},$$

$$A_2 = 6h^2 - 9h + 4 - \frac{3(h-1)(2h-1)}{(\mu_* - 1)h + 1},$$

$$B_2 = -\alpha\left[h(4h^2 - 6h + 3) - \frac{3h(2h-1)(h-1)}{(\mu_* - 1)h + 1}\right], \tag{3.5}$$

$$C_2 = (1 - \rho_*)\gamma\left[h(4h^2 - 6h + 3) - \frac{3h(2h-1)(h-1)}{(\mu_* - 1)h + 1}\right],$$

$$D_2 = -\frac{6(h-1)\varkappa_*}{[(1-\varkappa_*)h - 1]^2}\left[h - 1 - \frac{2h-1}{(\mu_* - 1)h + 1}\right],$$

величины a_i, b_i, c_i $(i=1,\ 2)$ равны значениям A_i, B_i, C_i при $h = h_0$.

Согласно (3.I) все величины, определяемые формулами (3.5), являются сложными функциями от x, y.

4. Линеаризованная задача. При каждом значении λ задача (3.2) – (3.5) имеет тривиальное решение $\vec{\Phi} \equiv 0$. Линеаризованное в окрестности этого решения уравнение (3.2) имеет вид

$$L\vec{\Phi} = \lambda \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_2 & a \end{pmatrix} \vec{\Phi}, \tag{4.1}$$

где величины d_i равны значениям D_i при $h = h_0$. Задача (4.I) приводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi + a\varphi &= \lambda b\varphi, \\ -\Delta\phi &= \lambda c\phi, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$a = \frac{(1-\rho_*)\gamma}{\alpha}, \quad b = -\frac{3h_0\varkappa_*[\mu_* - (1-h_0)^2/h_0^2]}{2\alpha[(\varkappa_* - 1)h_0 + 1]^2(1-h_0)[(\mu_* - 1)h_0 + 1]}$$

$$c = \frac{6\mu_*\varkappa_* h_0^4[(\mu_* - 1)h_0 + 1]}{[(\varkappa_* - 1)h_0 + 1]^2}. \tag{4.3}$$

Далее считаем периодические функции φ и ϕ (как в линейной так и в нелинейной задаче) четными по x, y. Очевидно, что оператор задачи (4.2) инвариантен относительно сужения φ и ϕ на пространство четных функций. Решение системы (4.2) с условиями периодичности и четности функций φ, ψ существует при

$$\lambda = \lambda_{pq} = [4\pi^2(p^2/n^2 + q^2/m^2) + a]/b \tag{4.4}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, q = 0, 1, \ldots, p^2 + q^2 \neq 0)$$

и имеет вид

$$\varphi = A_{pq}\cos\frac{2\pi px}{n}\cos\frac{2\pi qy}{m}, \quad \psi = \frac{c\lambda_{pq}\varphi}{4\pi^2(p^2/n^2 + q^2/m^2)},$$

где A_{pq} – произвольные постоянные.

Если числа n и m конечны и отношение m^2/n^2 не является рациональным числом, то каждое собственное значение λ_{pq} простое. Действительно, пусть m^2/n^2 – иррациональное число и двум различным собственным векторам отвечает одно и то же собственное значение, т.е. $\lambda_{pq} = \lambda_{rs}$, причем выполняются неравенства $p \neq r$, $q \neq s$ (при $p = r$, $q \neq s$ из равенства $\lambda_{pq} = \lambda_{ps}$ и (4.4) следует $m = \infty$, а при $q = s$, $p \neq r$ – $n = \infty$). С учетом (4.4) находим $p^2/n^2 + q^2/m^2 = r^2/n^2 + s^2/m^2$, т.е. $m^2/n^2 = (s^2 - q^2)/(p^2 - r^2)$. Так как числа p, q, r, s – целые, то последнее равенство противоречит предположению об иррациональности отношения m^2/n^2. Следовательно, каждое собственное число λ_{pq} простое. При $n = \infty$ (соответственно при $m = \infty$) собственными значениями являются числа λ_{oq}, $q = 1, 2, \ldots$ (соответственно λ_{po}, $p = 1, 2, \ldots$). Очевидно, что все собственные значения λ_{oq} ($q = 1, 2, \ldots$) и λ_{po} ($p = 1, 2, \ldots$) просты. Очевидно также, что когда m^2/n^2 является рациональным числом среди собственных чисел λ_{pq} могут существовать числа четной кратности.

Пусть для определенности, $n \geq m$. Наименьшее собственное значение

$$\lambda_o = \lambda_{10} = (\omega_n^2 + a)/b, \tag{4.5}$$

где $\omega_n = 2\pi/n$ – безразмерное волновое число.

Путем несложных преобразований можно показать, что при $h_0 = l_2/(l_1 + l_2)$ критический градиент температуры A, определяемый из равенства (I.II) и критический градиент, вычисляемый из равенства (4.5), совпадают.

5. Существование периодических решений. Оператор L, определяемый формулой (3.3), обратим. Поэтому уравнение (3.2) можно записать в таком виде:

$$\vec{\varphi} = \lambda L^{-1} R \vec{\varphi} + L^{-1} N \vec{\varphi} .$$

Оператор R вполне непрерывен. Действительно, пусть Ω – произвольное ограниченное множество функций $\varphi \in C^{2+\mu}(\bar{\Pi})$, т.е. $\sup\limits_{\varphi\in\Omega} \|\varphi\|_{2+\mu} \le M_1$. Тогда из определения нормы $\|\cdot\|_{2+\mu}$ следует

$$\sup_{\varphi\in\Omega} \|\nabla\varphi\|_{1+\mu} \le M_2 , \quad \sup_{\varphi\in\Omega} |\varphi| \le M_3$$

и поэтому

$$\sup_{\varphi\in\Omega} \|R_i(\varphi)\|_{1+\mu} \le \max_{h\in[0,1]} |D_i| \sup_{\varphi\in\Omega} \|\varphi\|_{2+\mu} + \tag{5.1}$$
$$+ \max_{h\in[0,1]} \left|\frac{\partial D_i}{\partial h}\right| \sup \left\|\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right\|^2_{3+\mu} \|\nabla\varphi\|^2_{1+\mu} \le M_4 .$$

Таким образом, оператор R переводит ограниченное множество в ограниченное. Из оценки (5.I), в частности, следует, что $\sup\limits_{\varphi\in\Omega} \|R_i(\varphi)\|_{\mu} \le M_5$, т.е. совокупность функций $\{R_i(\varphi)\}_{\varphi\in\Omega}$ равностепенно непрерывна (удовлетворяет условию Гельдера с общей постоянной M_5). Так как L^{-1} – ограниченный оператор, а R – вполне непрерывный, то оператор $L^{-1}R$ вполне непрерывен.

Из формул (3.4), (3.5) находим

$$\lim_{\|\vec{\Phi}\| \to 0} \frac{\| N_i \vec{\Phi} \|_\mu}{\|\varphi\|_{2+\mu} + \|\psi\|_{2+\mu}} = 0 .$$

Отсюда и из ограниченности оператора L^{-1} следует неравенство

$$\| L^{-1} N \vec{\Phi} \|_\mu \le M_6 \|\vec{\Phi}\|^2_{2+\mu} , \quad M_6 = \text{const} . \tag{5.2}$$

Собственные числа λ_{pq} задачи (4.2), очевидно, совпадают с характеристическими числами производной Фреше оператора $L^{-1}R$ в точке $\vec{\Phi} = 0$.

Для доказательства существования нетривиального решения уравнения (3.2) воспользуемся теоремой М.А.Красносельского ([3], стр. 208).

<u>Теорема</u>. Пусть оператор C ($C\theta = \theta$, θ – нулевой элемент) представим в виде $C = A + D$, где A – вполне непрерывный оператор, а оператор D удовлетворяет условию Липшица в следующей форме

$$\| Du - Dv \| \le q(\rho) \| u - v \| \; (\|u\|, \|v\| \le \rho) , \tag{5.3}$$

и

$$\lim_{\rho \to 0} q(\rho) = 0 . \tag{5.4}$$

Тогда каждое характеристическое число нечетной кратности производной Фреше оператора A будет точкой бифуркации оператора C. Этой точке бифуркации соответствует в окрестности θ непрерывная ветвь собственных векторов оператора A.

Из перечисленных свойств операторов $L^{-1}R$ и $L^{-1}N$ (в силу (5.2) в формулах (5.3), (5.4) можно выбрать $\rho =$ $= \sup_{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2 \in \vec{C}^{2+\alpha}(\bar{\Pi})} \| \vec{\Phi}_{10} + \vec{\Phi}_{20} \|$ $q(\rho) \le 2M_6(\rho)$ и свойств изученной в п.4 линейной задачи следует

<u>Утверждение I</u>. Каждое число λ, определяемое формулами

(4.3), (4.4), где n и m – произвольные числа, для которых m^2/n^2 – иррациональное число, является точной бифуркации системы (3.2). Все нетривиальные решения, ответвляющиеся от решения $\vec{\varphi} \equiv 0$ при $\lambda = \lambda_{pq}$, $p, q = 1, 2, \ldots$, являются двоякопериодическими функциями пространственных координат (с периодами n, m). При $p = 0$, $q = 1, 2, \ldots$ и при $q = 0$, $p = 1, 2, \ldots$ ответвляющиеся нетривиальные решения являются периодическими функциями одной пространственной координаты.

С физической точки зрения наибольший интерес представляет картина ветвления при наименьшем собственном значении λ_0. Значению λ_0 соответствует определяемое формулой (I.9) критическое число Ma, при котором согласно утверждению I в системе двух тонких слоев несмешивающихся жидкостей возникают стационарные периодические конвективные движения.

Автор благодарит В.В.Пухначева за полезные консультации.

Литература

I. Антановский Л.К. Ветвление решений задачи со свободной границей для уравнений термокапиллярной конвекции. – В сб.: Динамика сплошной среды, Новосибирск, вып. 54, I982, с.3–I4.

2. Smith R.A. On convective instability induced by surface-tension gradients. – J. Fluid Mech. v. 24, N 2, 1966, p. 401 – 414.

3. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, I956. – 392 с.

4. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, I953. – 788 с.

5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, т.I, I970. – 492 с.